解析学の勉強記録

序文

これは私の解析学の勉強記録として記した PDF ファイルである．解析学を学ぶにあたり，主なテキストは高木貞治『定本 解析概論』を採用した．個人的には高木先生はお札の肖像画になるレベルの業績を上げた世界的数学者だと思っているのだが，それは良いとして，超一流の数学者が記した解析学の教科書である．日本の解析学の教科書はこの本をベースに記されているようで，それくらい数学界隈では有名な本らしい．現在は版権も切れていて，https://linesegment.web.fc2.com/books/mathematics/zouteikaisekigairon/で見ることができるのでもしよければ参照されたい．

そもそもこの PDF をどれくらいの人が見ているかは定かではないが，初学者の私が勉強記録としてこの PDF を記す訳で，名著『解析概論』を劣化させてし舞いかねないのは多めに見てほしい．又，数学的な誤りがあった際は，私の連作先に報告していただけるとありがたい．Welcome である．

又，自分の勉強が進むにつれて内容を順次更新する予定だが，それらの更新記録については一切明示しないので注意されたい．

［令和 5 年 9 月］

著者記す

目 次

1　実数の連続性公理

定義 1.1. ある集合の数全てを B の如何なる数よりも A の如何なる数が小さくなるように A, B に分けた時，(A, B) をデデキントの切断という．但し，集合 A 或いは B のどちらかが空になることは許さない．又，A を下組，B を上組と言う．

周り諄く,「如何なる数よりも小さくなるように」と記しているのは，考える数の集合によっては，A の最大値や B の最小値が存在しない場合があるので，このような定義にせざるを得ない．実際に，定義 1.1 から行けば，切断は次の 3 種類に限られる．

(1°) 下組に最大値があり，且つ上組に最小値がある．

(2°) 下組に最大値がなく，且つ上組に最小値がない．

(3°) 下組に最大値があり，且つ上組に最小値がない（若くはその逆）．

例 1.2. (1) ある集合が整数の場合，切断は (1°) に限る．

(2) ある集合が有理数の場合，切断は有理数の稠密性より (1°) は不可能であるが，(2°) は可能である．実際に $\sqrt{2}$ より大きい数，小さい数で分ければ，切断は完成するが，$\sqrt{2}$ は有理数ではない無理数なので有理数の切断は (2°) となる[1]

(3) ある集合が実数の場合，切断は (3°) に限られる．実際，ある実数 r を 1 つ取って r よりも小さい数を下組 A に，r よりも大きい数を上組 B に分けた時，デデキントの切断 (A, B) を作るためには，定義 1.1 より，r 自身が A 或いは B に入らなければいけない．仮に，A に r が入った場合，A には最大値があり，B には最小値がないことになる．逆に，r が B に入るのならば，A に最大値はなく，B に最小値があることになる．

このようにして，実数の切断はある数 r により作成可能であることが分かるが，重要なのはその逆である．

定理 1.3. 実数の切断が与えられると，上組，下組を境界にして一つの実数を確定する．［*Dedekind* の定理］

これが実数の連続性である．

---

[1] 勿論，切断の仕方によっては，(3°) も可能である．実際に有理数 q より小さい有理数と q より大きい有理数で分けたあと，そのどちらかに q を入れて仕舞えば切断なるものは完成する．が，ココで重要なのは，思考の対象となる数が連続であるかどうかである．従って，有理数は (3°) であるが故に，恰も連続になっているような気がするが，(2°) の切断が可能である以上，不連続であるという事実は無視できない．ココでは有理数は連続ではないという事実を述べているだけで，切断の種類としては (3°) も可能であるということは忘れないでほしい．

2　上限・下限

定義 2.1. 実数集合 S の全ての数がある数 M 以下であるとき，S は上に有界と言い，M を上界という．下界はその逆で，下に有界と言い，下に有界の時，M を下限という．上に有界で，且つ下に有界であるとき，S は有界であるという．

上界 M よりも大きい実数は上界で，上界に関しては果てしなく沢山存在する．従って，我々は最小上界なる物に興味がある（勿論最大下界についても）．

定義 2.2. 最小の上界を上限，最大の下界を下限という．

定理 2.3. 集合 S が上に有界（下に有界）であるとき，上限（下限）が存在する．［*Weierstrass* の定理］

証明. 先ずは下に有界な時に下限が存在することを証明する．

集合 S の下界となり得る数を A，それ以外を B として分ければ，一つの切断 (A, B) が出来る．ここで，定理 1.3 より，A, B の境界に 1 つの数 r が確定し，それが A と B のどちらに入るのかを考えなければいけない．r が A に入るのならば，A は r を最大値として持ち，B には最小値がない状態となる．逆に r が B に入るのであれば，A は最大値を持たず，B は最小値を持つことになる．今，我々の目標としては，下に有界な時に下限（最大下界）を持つことを示したいので，先のうち前者を示す必要がある．それでは背理法で示そう．

r が B に属すとしよう．B は下界になり得ない数の集合であるので，r よりも小さく，S に属する数 s が存在する．[2] ここで $y = \dfrac{s+r}{2}$ とすれば，$s < y < r$ となる実数 y が存在する．

- y は S に属する s よりも大きいので明らかに下界でなく，A に属さない．
- r は B の最小値であるので，それよりも小さい y は B には属さない．

これら 2 点より，全ての実数が切断により余すことなく分けられたはずだが，どちらにも属さない実数 y が出てきてしまった．これは定義 1.1 に矛盾する．故に，r は A に属し，下界になり得る集合 A には最大値つまり下限を持つと言うことが分かった．

上に有界である時にも同様の議論を行えば容易い．（証終）

定義 2.1 より，実数集合 S に最大値，或いは最小値が無くても上限，或いは下限が存在する．と言うことが分かる．

[2] 仮に r が下界であるのは命題 $\exists r \in \mathbb{R}$ s.t $\forall x \in S$, $r \leq x$ が成立する時だが，今回は r は下界でないのだから，この命題の否定をとって，$\forall r \in \mathbb{R}$, $\exists x \in S$ s.t $r > x$ が成立する時である．従って本文のような記述となる．